Sur l'orientation des systèmes de droites.

Par M. G. Humbert.

I.—*Théorêmes fondamentaux.*

1. Laguerre a fait connaître, dans le Bulletin de la Société philomatique, plusieurs propositions géométriques très simples, relatives aux directions des systèmes de droites dans le plan, et il en a déduit des conséquences nombreuses et importantes: nous avons eu nous même l'occasion, dans un mémoire sur le théorême d'Abel, de retrouver analytiquement ces propositions et de leur donner une certaine extension; notre but est maintenant de démontrer un principe très général, auquel peuvent se rattacher toutes les propriétés énoncées jusqu'ici sur les directions des systèmes de droites, et qui se prête aisément à des applications nouvelles.

A cet effet, nous commencerons par présenter sous une forme nouvelle une notion importante, introduite dans la Géométrie par Laguerre, celle de l'*orientation* d'un système de droites. La définition donnée par Laguerre est la suivante.

Soient, dans un plan, deux systèmes de n droites, A et A'; prenons arbitrairement un axe fixe, H, dans ce plan: si la somme des angles que font avec l'axe fixe les droites du système A est égale, à un multiple de π près, à la somme analogue pour les droites du système A', on dit que les systèmes A et A' ont même *orientation:* cette propriété est évidemment indépendante du choix de l'axe fixe H dans le plan: elle ne dépend que des directions des droites considérées.

2. Cette définition peut être transformée et précisée, au point de vue analytique, comme il suit.

Menons par l'origine des parallèles :

$$y - a_1x = 0, \; y - a_2x = 0, \ldots . \; y - a_nx = 0$$

et

$$y - a_1'x = 0, \qquad \ldots . \; y - a_n'x = 0,$$

aux n droites de chacun des systèmes A et A'; soient $\alpha_1 \ldots . \alpha_n$; $\alpha_1' \ldots . \alpha_n'$, les angles de ces droites avec $0x$, les axes étant supposés rectangulaires. On a

$$\alpha_\kappa = \text{arc tg } a_\kappa, \quad \alpha_\kappa' = \text{arc tg } a_\kappa',$$

d'où :

$$e^{2i\alpha_\kappa} = \cos(2 \text{ arc tg } a_\kappa) + i \sin(2 \text{ arc tg } a_\kappa),$$

c. à d.

$$e^{2i\alpha_\kappa} = \frac{1 - a_\kappa^2}{1 + a_\kappa^2} + i \frac{2a_\kappa}{1 + a_\kappa^2} = \frac{(1 + ia_\kappa)^2}{1 + a_\kappa^2} = \frac{i - a_\kappa}{i + a_\kappa},$$

et par suite

$$e^{2i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . + \alpha_n)} = \frac{(i - a_1)(i - a_2) \; ; \ldots (i - a_n)}{(i + a_1)(i + a_2) \ldots . (i + a_n)}.$$

Soit posé maintenant

$$(y - a_1x)(y - a_2x) \ldots . (y - a_nx) = f(x, y),$$
$$(y - a_1'x) \qquad \ldots . (y - a_n'x) = \varphi(x, y),$$

il vient

$$e^{2i(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots . + \alpha_n)} = \frac{f(1, i)}{f(-1, i)}$$

et

$$e^{2i(\alpha_1' + \ldots . + \alpha_n')} = \frac{\varphi(1, i)}{\varphi(-1, i)}.$$

Si donc les deux systèmes A et A' ont même orientation, c. à d. si l'on a, d'après la définition

$$\alpha_1 + \ldots . + \alpha_n = \alpha_1' + \ldots . + \alpha_n' + h\pi,$$

on aura

$$\frac{f(1, i)}{f(-1, i)} = \frac{\varphi(1, i)}{\varphi(-1, i)}.$$

On peut donc considérer comme définissant l'orientation d'un système de droites issues de l'origine, représenté par l'équation homogène $f(x, y) = 0$, le rapport $\frac{f(1, i)}{f(-1, i)}$. Si les droites ne passent pas toutes par l'origine, et si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de leur ensemble, l'orientation sera définie par le rapport $\frac{f(1, i, 0)}{f(-1, i, 0)}$ et, plus généralement encore, si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation d'une courbe algébrique quelconque, le rapport $\frac{f(1, i, 0)}{f(-1, i, 0)}$ définira l'orientation du système des directions asymptotiques de cette courbe.

3. Cela posé, considérons dans un plan un système variable de n droites, dont l'équation dépend rationnellement d'un paramètre λ, et soit

$$\lambda^p A + \lambda^{p-1} B + \ldots + \lambda L + M = 0, \tag{1}$$

cette équation. L'orientation du système est définie par le quotient:

$$\omega = \frac{\lambda^p A(1, i, 0) + \lambda^{p-1} B(1, i, 0) + \ldots + M(1, i, 0)}{\lambda^p A(-1, i, 0) + \lambda^{p-1} B(-1, i, 0) + \ldots + M(-1, i, 0)}.$$

Pour que ω soit indépendant de λ, c. à d. pour que le système variable ait une orientation fixe, il faut et il suffit que l'on ait:

$$\frac{A(1, i, 0)}{A(-1, i, 0)} = \frac{B(1, i, 0)}{B(-1, i, 0)} = \ldots = \frac{M(1, i, 0)}{M(-1, i, 0)}. \tag{2}$$

Ces conditions peuvent s'interpréter géométriquement d'une manière très élégante: les racines de l'équation $\lambda^p A(1, i, 0) + \ldots + M(1, i, 0) = 0$ sont en effet les valeurs de λ qui correspondent aux systèmes compris dans l'équation (1) et contenant une droite qui passe par le point cyclique $I(x=1, y=i, z=0)$; de même les racines de l'équation $\lambda^p A(-1, i, 0) + \ldots + M(-1, i, 0) = 0$ sont les valeurs de λ qui correspondent aux systèmes contenant une droite qui passe par le point cyclique $J(x=-1, y=i, z=0)$; les conditions (2) expriment que ces équations ont les mêmes racines, c. à d. que tout système contenant une droite (et généralement $\varkappa$ droites) passant par I, contient aussi une droite (et généralement $\varkappa$ droites) passant par J. De la cette conclusion fondamentale:

Théorème.—Pour qu'un système variable de n droites, dont l'équation contient rationnellement un paramètre, conserve dans le plan une orientation fixe, il faut et il suffit que lorsqu'une ou plusieurs des droites du système viennent à passer par un des points cycliques, d'autres droites du système en même nombre, passent au même instant par l'autre point cyclique.

Plus généralement, si l'equation (1) est celle d'une famille de courbes algébriques, on peut énoncer la proposition suivante:

Soit une famille de courbes algébriques, dont l'équation contient rationnellement un paramètre: pour que l'orientation du système des directions asymptotiques de chacune de ces courbes soit constante, il faut et il suffit que toutes les courbes de la famille qui passent par un des points cycliques du plan, passent en même temps par l'autre.

4. On peut faire de ces principes des applications nombreuses. Considérons d'abord le cas où le paramètre λ figure au premier degré dans l'équation d'une famille de courbes ; ces courbes appartiennent alors à un même faisceau ponctuel,

$$f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) = 0.$$

L'orientation du système des directions asymptotiques d'une des courbes précédentes dépend du coefficient

$$\omega = \frac{f(1, i, 0) + \lambda\varphi(1, i, 0)}{f(-1, i, 0) + \lambda\varphi(-1, i, 0)}$$

et de cette expression résulte immédiatement ce théorème :

Si deux courbes algébriques de degré n sont telles que leurs systèmes respectifs d'asymptotes aient même orientation, le système des asymptotes de toute autre courbe de degré n, passant par les points d'intersection des deux premières, aura même orientation que chacun des deux systèmes primitifs.

Si la courbe $\varphi = 0$ passe par les points cycliques du plan, $\varphi(1, i, 0)$ et $\varphi(-1, i, 0)$ sont nuls ; par suite :

Si deux courbes de même degré rencontrent aux mêmes points une courbe algébrique quelconque passant par les points cycliques du plan, les deux systèmes formés par leurs directions asymptotiques ont même orientation.

Comme cas particulier de cette proposition, on retrouve un théorême important, dû à Laguerre, et qu'on obtient en supposant que la courbe algébrique considérée devienne un cercle :

Si l'on groupe deux à deux, d'une manière quelconque, sur n droites, les 2n points communs à un cercle et à une courbe algébrique d'ordre n, l'orientation de chacun des systèmes de n droites ainsi obtenus est la même que celle des asymptotes de la courbe.

II.— *Orientation de certains systèmes de tangentes.*

5. En transformant par polaires réciproques quelques unes des propositions qui précèdent, on arrive à des théorêmes intéressants sur l'orientation du système des tangentes qu'on peut mener d'un point à une courbe ; ainsi, la proposition qui termine le n° 3 donne lieu à la suivante :

Soit une famille de courbes dont l'équation tangentielle contient rationnellement un paramètre : pour que l'orientation du système des tangentes qu'on peut mener d'un point fixe, 0, *à chacune de ces courbes demeure constante, il faut et il suffit que toutes*

les courbes de la famille qui touchent une des droites isotropes issues de 0 *touchent l'autre droite isotrope issue de ce point.*

En particulier, si les courbes considérées appartiennent à un même faisceau tangentiel, une seule de ces courbes touchera une droite isotrope issue de 0; si elle touche en même temps l'autre droite isotrope, le point 0 sera un foyer de cette courbe. Donc:

Soit un faisceau tangentiel de courbes algébriques de classe n; par un foyer f de l'une d'elles menons les n tangentes à l'une quelconque des autres: tous les systèmes ainsi obtenus à partir du point f ont même orientation. Reciproquement, *si un point f jouit de cette propriété, c'est le foyer de l'une des courbes du faisceau.*

Si deux des courbes du faisceau sont homofocales, toutes les courbes du faisceau ont les mêmes foyers; l'une d'elles se décompose en une courbe de classe $n-2$ et en deux points, qui sont les points cycliques du plan. Un point quelconque du plan peut être considéré comme un foyer de ce système de deux points, il résulte de là, par l'application du théorême précédent, que:

Les deux systèmes formés par les tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque à deux courbes homofocales de même classe ont même orientation; ou encore:

Le système des tangentes menées d'un point quelconque à une courbe algébrique de classe n, et le système des droites qui joignent le même point aux n foyers réels de la courbe ont même orientation. [Laguerre.]

En combinant ce résultat avec le précédent, on arrive à une proposition simple relative au lieu des foyers des courbes d'un même faisceau tangentiel.

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel déterminé par deux courbes A et B, de classe n, est une courbe telle que si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de A et aux n foyers réels de B, les deux systèmes de droites ainsi obtenus aient même orientation.

6. Nous reviendrons plus loin, avec quelques détails sur les conséquences géométriques de ce théorême; auparavant, nous ferons une application des principes précédents à la solution d'un problème qui parait présenter un certain intérêt.

Ce problème est le suivant:

Trouver toutes les courbes algébriques telles que le système des tangentes qu'on

peut mener d'un point à l'une d'elles ait une orientation fixe indépendante de la position de ce point dans le plan.

Si l'on se reporte au théorême de Laguerre démontré plus haut, on voit que ces courbes ne peuvent être que celles qui ont tous leurs foyers à l'infini ; mais avant d'affirmer inversement que les courbes qui ont tous leurs foyers à l'infini jouissent de la propriété énoncée, on doit faire une discussion, très simple d'ailleurs.

Soit en effet G une courbe de classe n dont tous les foyers sont à l'infini : il est nécessaire pour cela que la droite de l'infini soit une tangente multiple d'ordre $n-1$, et que la courbe passe par les points cycliques du plan. Si ces conditions sont remplies, toutes les tangentes qu'on peut mener à G par les points cycliques coïncident avec la droite de l'infini, et tous les foyers de la courbe sont sur cette droite, mais leur position n'est pas déterminée, de sorte que le théorême de Laguerre ne paraît pas immédiatement applicable.

On peut voir néanmoins, d'une autre manière, que l'orientation du système des n tangentes menées à G d'un point quelconque 0 du plan, ne dépend pas de la position de ce point. Imaginons en effet que 0 décrive une droite ; l'équation du système des n tangentes issues de 0 contient rationnellement un paramètre, et le théorême général du n° 3 est applicable. Par suite, l'orientation de ce système est fixe, si, toutes les fois qu'une ou plusieurs des tangentes issues de 0 passent par le point cyclique I, d'autres tangentes en même nombre passent par le point cyclique J. C'est précisément ce qui se présente ici ; une tangente menée de 0 à G ne peut passer par I que si 0 est à l'infini, et elle passe alors par J. Nous pouvons donc énoncer ce théorême :

L'orientation du système des n tangentes menées d'un point à une courbe algébrique de classe n, $n-1$ fois tangente à la droite de l'infini et passant par les points cycliques, est indépendante de la position du point considéré dans le plan.

Les courbes dont il s'agit sont nécessairement tangentes à la droite de l'infini aux points cycliques, sinon on pourrait mener $n+1$ tangentes de l'un de ces points.

Il est facile de donner l'équation générale de ces courbes en coordonnées tangentielles rectangulaires ; cette équation est :

$$(u^2+v^2)f_{n-2}(u, v) = F_n(u, v),$$

f étant un polynôme quelconque de degré $n-2$ en u et v, et F un polynôme également quelconque de degré n, mais homogène.

7. Parmi les courbes qui ont tous leurs foyers à l'infini, on peut citer, avec Laguerre, celles qui sont enveloppées par une droite dont deux points donnés décrivent respectivement deux courbes algébriques, quelconques d'ailleurs.

Un autre exemple intéressant est fourni par la famille des épicycloïdes algébriques.

Si une courbe a tous ses foyers à l'infini, c. à d. si les tangentes qu'on peut lui mener par les points cycliques coïncident toutes avec la droite de l'infini, la réciproque de cette courbe par rapport à un cercle de centre 0 sera telle que les droites isotropes issues de 0 ne la couperont qu'au point 0.

Or la réciproque d'une épicycloïde par rapport au cercle fixe a pour équation, en coordonnées polaires

$$\frac{1}{r} = k \cos \frac{1}{2n+1}\,\theta, \tag{3}$$

n désignant le rapport du rayon du cercle mobile à celui du cercle fixe ; de plus n est positif pour l'épicycloïde, et négatif pour l'hypocycloïde.

M. Halphen a étudié d'une manière complète les points multiples des courbes (3), dont il écrit l'équation

$$\frac{1}{r} = k \cos \frac{p}{q}\,\theta, \tag{4}$$

p et q étant positifs et premiers entre eux. Il résulte de ses belles recherches que les courbes précédentes n'ont un point singulier à l'origine, 0, que si p est plus grand que q; en ce cas, la courbe présente en 0 deux *cycles*, dont les tangentes sont respectivement les droites isotropes ; l'ordre de ces cycles est $p-q$ ou $\frac{p-q}{2}$, selon que p et q ne sont pas ou sont tous deux impairs ; la classe des cycles est $2q$ ou q. D'ailleurs le degré de la courbe est $2p$ ou p. L'une des droites isotropes issues de 0 a en ce point avec la courbe un nombre d'intersections égal à la somme de l'ordre et de la classe du cycle correspondant, et de l'ordre de l'autre cycle, c. à d. égal à $2p$ ou à p, ou, si l'on veut, égal dans tous les cas au degré de la courbe. Elle ne coupe donc la courbe qu'au point 0.

Il résulte de là qu'une épicycloïde ou hypocycloïde algébrique aura tous ses foyers à l'infini si sa réciproque a une équation de la forme (4), p et q étant positifs, premiers entre eux, et p étant supérieur à q.

Soit alors $n = \frac{\lambda}{\mu}$, λ et μ étant premiers entre eux; on aura

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{2n+1} = \pm \frac{\mu}{2\lambda + \mu},$$

si μ et λ sont positifs, c. à d. si la courbe est une épicycloïde, p sera toujours inférieur à q.

Si la courbe est une hypocycloïde, on devra supposer λ négatif, et l'on aura, si $\lambda = -\lambda'$:

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{\mu}{\mu - 2\lambda'}.$$

Il faut, pour que p soit supérieur à q, que μ soit, en valeur absolue, supérieur à $\mu - 2\lambda'$, c. à d. que λ' soit plus petit que μ; n est alors, en valeur absolue, inférieur à 1. Donc:

Les hypocycloïdes algébriques obtenues en faisant rouler un cercle à l'intérieur d'un cercle plus grand ont tous leurs foyers à l'infini; et par suite *l'orientation du système des tangentes menées d'un point du plan à l'une de ces courbes est indépendante de la position du point.*

Les autres courbes de la famille des épicycloïdes ou hypocycloïdes algébriques ne possédent pas la même propriété.

III.—*Application à l'hypocycloïde à trois rebroussements.*

8. La plus simple des hypocycloïdes qu'on vient de rencontrer est, après la droite qui correspond au cas de $n = -\frac{1}{2}$, l'hypocycloïde à trois rebroussements, qui correspond à celui de $n = -\frac{1}{3}$; le théorême précédent donne une propriété des tangentes à cette courbe qui paraît nouvelle, et qu'on peut énoncer ainsi:

L'orientation du système des trois tangentes menées d'un point quelconque à une hypocycloïde à trois rebroussements est la même que celle des trois axes de symétrie de la courbe.

Ce théorême permet, lorsqu'on connaît deux tangentes de l'hypocycloïde, de construire immédiatement et sans ambiguïté la troisième tangente qu'on peut mener par le point d'intersection des deux premières. On peut le regarder comme l'interprétation géométrique, dans le cas de l'hypocycloïde, de la propriété analytique fondamentale des courbes de troisième classe, propriété bien connue qu'on peut énoncer ainsi: il est possible de faire correspondre à chaque tangente d'une courbe de troisième classe un argument, de telle sorte que les arguments

des trois tangentes issues d'un point quelconque aient une somme constante. En général, on ne connaît pas la signification *géométrique* de ces arguments, qui s'introduisent par la considération des fonctions elliptiques ; dans le cas de l'hypocycloïde, on voit que cette signification est très simple, l'argument étant l'angle que fait la tangente avec un des axes de symétrie de la courbe.

Il importe, pour ce qui va suivre, de préciser cette notion : soit t une tangente de l'hypocycloïde ; si par un point fixe 0 nous menons une parallèle à t et une parallèle $0x$ à l'un des axes de la courbe, choisi une fois pour toutes, nous désignerons par α l'angle que font ces deux droites, en le comptant à partir de $0x$, dans le sens trigonométrique. Cet angle n'est défini qu'à un multiple près de π, cequi n'a aucun inconvénient, puisque les orientations sont définies dans les mêmes conditions.

9. Cela posé, on déduit aisément du théorême fondamental les conséquences suivantes.

Soit t une tangente en un point A de l'hypocycloïde : les bissectrices de l'angle des deux tangentes, autres que t, que l'on peut mener à la courbe par un point de cette droite, sont parallèles à deux directions fixes.

Ces directions sont celles des tangentes aux points B et C, où la tangente t rencontre de nouveau l'hypocycloïde.

On voit ainsi qu'une tangente à la courbe la rencontre de nouveau en deux points, où les tangentes sont perpendiculaires l'une à l'autre : proposition bien connue, qui sert de base au beau mémoire de M. Cremona sur l'hypocycloïde.

Par deux points quelconques d'une tangente t à l'hypocycloïde menons à la courbe les quatre tangentes autres que t : ces quatre droites forment un quadrilatère inscriptible dans un cercle.

Réciproquement, si le quadrilatère complet formé par quatre tangentes de l'hypocycloïde a quatre de ses sommets sur un cercle, la droite qui joint les deux autres sommets est une tangente de la courbe.

Dans tout triangle isocèle circonscrit à une hypocycloïde, la droite qui joint le sommet au point de contact de la base est une tangente de la courbe.

Par chaque sommet d'un triangle circonscrit à une hypocycloïde passe une nouvelle tangente, distincte des côtés du triangle : les trois droites ainsi définies forment un nouveau triangle semblable au premier.

10. Ce dernier théorême mérite d'être étudié avec quelques détails; il donne lieu à des conséquences intéressantes.

D'un triangle ABC, circonscrit à l'hypocycloïde, on déduit, en menant les tangentes, distinctes des côtés, qui passent par les trois sommets, un nouveau triangle $A_1B_1C_1$ semblable au premier; en appliquant la même construction à $A_1B_1C_1$, on obtient un troisième triangle semblable aux deux premiers, et ainsi de suite. Cette série de triangles est-elle illimitée? Retombe-t-on nécessairement sur un des triangles déjà trouvés, ou l'un des triangles finit-il par se réduire à un point? Ce sont là des questions auxquelles il est facile de répondre par l'application du théorême fondamental.

Désignons par α, β, γ les angles que font avec un des axes de symétrie de la courbe les côtés du triangle ABC; soit γ_1 l'angle que fait avec ce même axe la troisième tangente issue du point C. On a, d'après le théorême fondamental:

$$\gamma_1 + \alpha + \beta = h\pi,$$

d'où

$$\gamma_1 \equiv \gamma - (\alpha + \beta + \gamma) \mod \pi.$$

Par suite les angles α_1, β_1, γ_1, que font avec l'axe considéré les trois côtés du triangle $A_1B_1C_1$ sont:

$$\alpha_1 \equiv \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) \mod \pi,$$
$$\beta_1 \equiv \beta - (\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\gamma_1 \equiv \gamma - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Ce sont ces relations qui montrent la similitude des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, puisque l'on en tire évidemment

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha - \beta, \ \alpha_1 - \gamma_1 = \alpha - \gamma, \ \beta_1 - \gamma_1 = \beta - \gamma.$$

Rien n'est plus aisé que de déterminer le rapport de similitude.

Remarquons en effet que les côtés homologues des deux triangles se coupent sous des angles égaux à $(\alpha + \beta + \gamma)$; or, d'après un théorême connu de géométrie élémentaire, si, par les sommets d'un triangle, on mène des droites faisant avec les côtés opposés, dans un même sens de rotation, des angles égaux ω, on forme avec ces droites un nouveau triangle semblable au premier, avec un rapport de similitude égal à $2 \cos \omega$.

Les triangles $A_1B_1C_1$ et ABC sont donc semblables avec un rapport de similitude égal à $2 \cos (\alpha + \beta + \gamma)$.

11. De là se déduisent de suite quelques résultats simples.

En premier lieu, si $\alpha+\beta+\gamma\equiv\pm\frac{\pi}{3}$, $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ est égal à $\frac{1}{2}$, et les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont égaux. On a d'ailleurs

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1\equiv-2(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\pm\frac{\pi}{3} \mod \pi$$

et le triangle $A_2B_2C_2$ déduit de $A_1B_1C_1$ sera égal aux deux précédents. On a pour ce triangle:

$$\alpha_2\equiv\alpha_1\mp\frac{\pi}{3}\equiv\alpha\pm\frac{\pi}{3} \mod \pi.$$

. . . .

De même pour le triangle $A_3B_3C_3$ déduit de $A_2B_2C_2$, on aura:

$$\alpha_3\equiv\alpha_2-(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)\equiv\alpha \mod \pi.$$

. . . .

Le triangle $A_3B_3C_3$ coïncide donc avec ABC, puisqu'on ne peut mener à l'hypocycloïde qu'une seule tangente parallèle à une droite donnée.

On peut donc énoncer la proposition suivante:

Pour simplifier, appelons *premier triangle dérivé*, ou, plus simplement, *triangle dérivé* d'un triangle T, circonscrit à l'hypocycloïde, le triangle T_1 formé par les tangentes menées à la courbe des sommets de T, et distinctes des côtés de T; appelons *second triangle dérivé* de T le premier triangle dérivé de T_1, et ainsi de suite. On a en premier lieu la proposition générale:

Tous les triangles dérivés d'un même triangle lui sont semblables. La propriété démontrée plus haut dans le cas où $\alpha+\beta+\gamma=\pm\frac{\pi}{3}$ s'énonce ainsi:

Si les côtés d'un triangle T, circonscrit à l'hypocycloïde, font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est $\pm\frac{\pi}{3}$, à un multiple près de π, les deux premiers triangles dérivés de T sont égaux à ce triangle, et le troisième coïncide avec T.

En second lieu, si $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, le rapport de similitude est nul; le triangle $A_1B_1C_1$ se réduit donc à un point. De plus on a:

$$\alpha_1=\alpha-\frac{\pi}{2} \mod \pi,$$

ce qui montre que les côtés de $A_1B_1C_1$ sont perpendiculaires à ceux de ABC. Donc :

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde, font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est $\frac{\pi}{2}$, *à un multiple près de* π, *les hauteurs de ce triangle sont des tangentes de l'hypocycloïde, et le triangle dérivé se réduit par suite à un point.*

12. Reprenons maintenant les relations

$$\alpha_1 \equiv \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) \quad \mod \pi,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

entre les angles qui correspondent à un triangle ABC et au triangle dérivé $A_1B_1C_1$. On a de même, en passant au dérivé de $A_1B_1C_1$:

$$\alpha_2 \equiv \alpha_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \equiv \alpha + (\alpha + \beta + \gamma) \quad \mod \pi,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En général, pour le $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé de ABC, on aura des expressions de la forme

$$\alpha_n \equiv \alpha + h_n(\alpha + \beta + \gamma) \quad \mod \pi,$$
$$\beta_n = \beta + h_n(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\gamma_n = \gamma + h_n(\alpha + \beta + \gamma).$$

Pour le $(n+1)^{\text{ième}}$ triangle, il viendra :

$$\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) \equiv \alpha - [2h_n + 1](\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

d'où, la loi de récurrence :

$$h_{n+1} + 2h_n + 1 = 0.$$

On en tire, puisque $h_1 = -1$:

$$h_n = \frac{(-2)^n - 1}{3},$$

et par suite, les angles α_n, β_n, γ_n que font avec l'axe les côtés du $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé de ABC sont donnés, en fonction des angles analogues α, β, γ qui correspondent à ce triangle, par les formules :

$$\alpha_n = \alpha + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\beta_n = \beta + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\gamma_n = \gamma + \frac{(-2)^n - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Observons enfin que le rapport de similitude des triangles

$$A_n B_n C_n \text{ et } A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$$

est égal, d'après un résultat rappelé plus haut, à

$$2 \cos \frac{(-2)^n - (-2)^{n-1}}{3} (\alpha + \beta + \gamma),$$

c. à d. à

$$2 \cos 2^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma).$$

13. Ces formules permettent de répondre aux questions que l'on s'était posées.

D'abord, dans quels cas la suite des triangles dérivés l'un de l'autre se terminera-t-elle à un point?

Pour que le triangle $A_n B_n C_n$ se réduire à un point, il faut que le rapport de similitude de ce triangle avec le triangle $A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$ soit nul, c. à d. que:

$$2^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi,$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2k+1}{2^n} \pi.$$

On aurait pu arriver de suite à ce résultat en écrivant que $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ est nul à un multiple près de π.

De là ce théorême, qui est la généralisation d'un résultat donné plus haut.

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est de la forme $\frac{2k+1}{2^n} \pi$, *la série des triangles dérivés du premier se terminera à un point, au bout de n constructions.*

Ce point sera le point de concours des hauteurs du $(n-1)^{\text{ième}}$ triangle dérivé du triangle primitif.

Cherchons maintenant dans quels cas on retombera, après un certain nombre de constructions sur le triangle primitif.

Il faut pour cela que l'on ait $\alpha_n \equiv \alpha$, $\beta_n \equiv \beta$, $\gamma_n \equiv \gamma \mod \pi$, c. à d.:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3k}{(-2)^n - 1} \pi.$$

Si n est le plus petit nombre pour lequel une relation de cette forme ait lieu, le $n^{\text{ième}}$ triangle dérivé du triangle primitif coïncidera avec ce triangle, et si l'on continue les constructions, on retrouve tous les triangles déjà formés.

Mais ici se présente une particularité curieuse: c'est qu'en construisant les triangles successifs à partir du premier, il peut arriver que l'un d'eux coïncide avec l'un des précédents sans que l'on ait retrouvé de nouveau le premier triangle.

En effet, le $p^{\text{ième}}$ et le $q^{\text{ième}}$ triangles dérivés ($q > p$) coïncideront si l'on a:

$$\frac{(-2)^p - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{(-2)^q - 1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) + k\pi,$$

c. à d.:

$$(-2)^p(\alpha + \beta + \gamma)[(-2)^{q-p} - 1] = 3k\pi,$$

ou

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3k}{(-2)^p[(-2)^{q-p} - 1]}\pi.$$

Si cette condition est remplie, k étant premier à 2, le $q^{\text{ième}}$ triangle dérivé coïncidera avec le $p^{\text{ième}}$, et, en continuant les constructions, on retrouvera indéfiniment les triangles dérivés dont l'ordre est compris entre p et $q-1$, sans retomber jamais sur le triangle primitif et les $p-1$ premiers triangles dérivés. Ainsi:

Si les côtés d'un triangle circonscrit à l'hypocycloïde font avec un des axes de symétrie de la courbe des angles dont la somme est de la forme $\frac{3k}{2^p[(-2)^{q-p} - 1]}\pi$, *le* $q^{\text{ième}}$ *triangle dérivé de ce triangle coïncidera avec le* $p^{\text{ième}}$.

14. Il est aisé d'expliquer à priori pourquoi, dans le cas qui nous occupe, le triangle primitif ne se reproduit pas nécessairement: cela tient à ce que la suite des triangles dérivés n'est pas réversible sans ambiguité, ou, en termes plus précis, à ce qu'un même triangle circonscrit à l'hypocycloïde peut être considéré comme le dérivé de deux autres triangles circonscrits, et non pas d'un seul.

Reprenons en effet les relations

$$\alpha_1 = \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + k\pi,$$
$$\beta_1 = \beta - (\alpha + \beta + \gamma) + l\pi,$$
$$\gamma_1 = \gamma - (\alpha + \beta + \gamma) + m\pi.$$

On en tire:

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{l + m - k}{2}\pi,$$
$$\beta = \beta_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{k + m - l}{2}\pi,$$
$$\gamma = \gamma_1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + \frac{k + l - m}{2}\pi.$$

Les nombres $l+m-k$, $k+m-l$, $k+l-m$ sont de même parité; on aura donc, pour α, β, γ, à des multiples de π près, les deux systèmes de valeurs:

$$\alpha=\alpha_1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1), \qquad \alpha=\alpha_1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+\frac{\pi}{2},$$
$$\beta=\beta_1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1), \qquad \beta=\beta_1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+\frac{\pi}{2},$$
$$\gamma=\gamma_1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1), \qquad \gamma=\gamma_1-\frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+\frac{\pi}{2}.$$

De là ce théorême:

Dans tout triangle circonscrit à une hypocycloïde, on peut inscrire deux autres triangles circonscrits à la courbe: ces deux triangles sont semblables au premier et semblables entre eux; leurs côtés homologues sont rectangulaires.

15. On pourrait pousser plus loin ces recherches, en étudiant l'ensemble des triangles circonscrits qui admettent pour triangle dérivé d'un ordre donné un même triangle circonscrit, et l'on arriverait ainsi à des résultats assez curieux que nous n'énoncerons pas, afin de ne pas fatiguer l'attention du lecteur; nous nous contenterons de signaler une proposition de nature différente qui se déduit aisément du théorême fondamental.

Soient A, B, C les points de contact des tangentes menées à l'hypocycloïde par un point M; sur les directions MA, MB, MC portons, à partir de M, des longueurs Ma, Mb, Mc, respectivement égales aux inverses des segments MA, MB, MC: le point M est le centre de gravité du triangle abc.

On peut donner une autre forme à ce théorême:

La tangente en M au cercle qui passe par les points M, A, B, est conjuguée harmonique de MC par rapport aux droites MA et MB; de plus, si l'on porte sur la droite MC, à partir de M et dans le sens opposé à MC, une longueur égale à $2MC$, l'extrémité du segment ainsi obtenu est sur le cercle précédent.

Sans insister sur les conséquences que l'on pourrait déduire de ces propositions pour la théorie de l'hypocycloïde à trois rebroussements, nous reviendrons au théorême démontré plus haut, relativement au lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes, et nous montrerons qu'il met en évidence une classe intérressante de courbes, étudiées déjà par divers géomètres, et en particulier par M. Darboux.

IV.—*Lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes.*

16. Nous avons démontré plus haut que :

Le lieu des foyers des courbes d'un faisceau tangentiel déterminé par deux courbes A et B, de classe n, est une courbe F, telle que si l'on joint un de ses points aux n foyers réels de A et aux n foyers réels de B, les deux systèmes de droites ainsi obtenus aient même orientation.

Ce résultat peut être présenté sous une autre forme. Groupons deux à deux, d'une manière quelconque, un foyer a_κ de la courbe A et un foyer b_κ de la courbe B; il est clair que le lieu F est celui des points tels que, de l'un quelconque d'entre eux, les n segments $a_\kappa b_\kappa$ soient vus sous des angles ayant une somme algébrique égale à un multiple de π, et l'on retrouve ainsi des courbes remarquables étudiées par M. Darboux.

Ces courbes comprennent, comme cas particuliers, les courbes telles que l'on voie, de chacun de leurs points, n segments fixes sous des angles dont la somme algébrique est égale à une constante quelconque : il suffit en effet de supposer que chacune des courbes A et B a un foyer à l'infini, c. à d. que ces courbes touchent toutes deux la droite de l'infini ; un des segments $a_\kappa b_\kappa$ est alors à l'infini, et il est vu de tout point du plan sous un angle constant, θ. La somme des angles sous lesquels les autres segments à distance finie sont vus d'un point quelconque du lieu F est donc constante, et égale à $-\theta$, à un multiple près de π.

De là définition même du lieu F résulte immédiatement une belle proposition, donnée par M. Darboux :

Si une courbe est telle que, de chacun de ses points, plusieurs segments soient vus sous des angles dont la somme est un multiple de π, *elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres segments ayant tous leurs extrémités sur la courbe.*

Ces segments s'obtiennent en joignant deux à deux, d'une manière quelconque, les foyers de deux courbes quelconques du faisceau tangentiel déterminé par les courbes A et B qui ont servi à la définition primitive du lieu.

Si A et B touchent la droite de l'infini, il résulte de ce qui à été dit plus haut que la proposition précédente doit être modifiée ainsi :

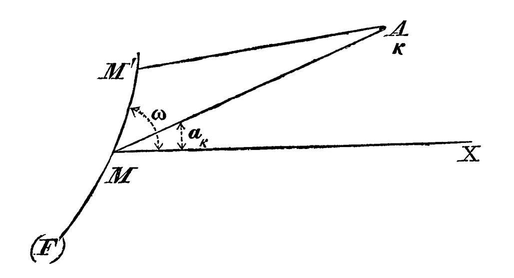
Si une courbe est telle que, de chacun de ses points, plusieurs segments soient vus sous des angles dont la somme est constante, elle conserve la même propriété avec une infinité d'autres segments, mais la valeur de la somme constante varie quand on passe d'un système de segments à l'autre.

La définition du lieu F ne dépend que de la position des foyers des courbes A et B; on peut en particulier supposer que chacune de ces courbes se réduise à ses n foyers réels, et l'on a ce théorême:

Si une courbe est telle qu'en joignant un quelconque de ses points à deux séries de n pôles fixes, à distance finie ou infinie, on obtienne deux systèmes de même orientation, cette courbe est le lieu des foyers des courbes de classe n qui touchent les n^2 droites joignant les pôles de l'une des séries aux pôles de l'autre série.

17. L'ensemble des n foyers réels d'une courbe appartenant à un faisceau tangentiel donné jouit de quelques propriétés simples, qui dérivent aisément des principes précédents.

Soient en effet $A_1, A_2, \ldots A_n$ les n foyers réels de la courbe A; $B_1 \ldots\ldots B_n$ ceux de la courbe B; M le foyer d'une courbe du faisceau tangentiel déterminé par A et B; M' le point infiniment voisin de M sur le lieu F.



Menons par M un axe quelconque MX; désignons par ω l'angle $M'MX$, par α_κ l'angle $A_\kappa MX$; par β_κ l'angle $B_\kappa MX$. On a, d'après la propriété fondamentale du lieu F:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_n$$

et, en passant de M à M',

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 + \ldots\ldots = d\beta_1 + d\beta_2 + \ldots\ldots$$

Or $d\alpha_\kappa$ est l'angle $M'A_\kappa M$, et l'on a, dans le triangle $M'A_\kappa M$:

$$d\alpha_\kappa = \frac{MM'}{MA_\kappa} \sin(\omega - \alpha_\kappa).$$

Par suite:

$$\sum \frac{\sin(\omega - \alpha_\kappa)}{MA_\kappa} = \sum \frac{\sin(\omega - \beta_\kappa)}{MB_\kappa}. \qquad (5)$$

18. Ce résultat est susceptible d'une interprétation géométrique élégante, si l'on introduit une notion due à Laguerre.

Cette notion est celle du *centre harmonique* d'un système de points par rapport à un point.

Etant donnés dans un plan un point M et un groupe de n points, $A_1 \ldots . A_n$, portons sur chaque droite MA_κ, à partir de M, une longueur égale à l'inverse de MA_κ: composons ces longueurs comme des forces; sur la direction de leur résultante, portons, à partir de M, une longueur égale à l'inverse de la $n^{\text{ième}}$ partie de cette résultante; l'extrémité, a, du segment obtenu sera dit le centre harmonique des points $A_1 \ldots . A_n$ relativement au point M.

D'après cette définition, si l'on imagine par M deux axes rectangulaires, MX et MY, et si α_κ est l'angle de MA_κ avec MX, les coordonnées du centre harmonique a seront:

$$X = n\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad Y = n\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$

étant posé

$$\xi = \Sigma\frac{\cos\alpha_\kappa}{MA_\kappa}, \qquad \eta = \Sigma\frac{\sin\alpha_\kappa}{MA_\kappa}.$$

On peut aussi écrire:

$$\xi = n\frac{X}{X^2+Y^2}, \qquad \eta = n\frac{Y}{X^2+Y^2}.$$

On aura des formules analogues pour les coordonnées des centre harmonique, b, des points $B_1 \ldots . B_n$ par rapport à M:

$$X' = n\frac{\xi'}{\xi'^2+\eta'^2}, \qquad Y' = n\frac{\eta'}{\xi'^2+\eta'^2},$$

étant posé

$$\xi' = \Sigma\frac{\cos\beta_\kappa}{MB_\kappa}, \qquad \eta' = \Sigma\frac{\sin\beta_\kappa}{MB_\kappa}.$$

Or la relation (5) donne:

$$\xi\sin\omega - \eta\cos\omega = \xi'\sin\omega - \eta'\cos\omega,$$

remplaçons dans cette équation ξ et η, ξ' et η' par leurs valeurs en X et Y, X' et Y', il vient:

$$\frac{X\sin\omega - Y\cos\omega}{X^2+Y^2} = \frac{X'\sin\omega - Y'\cos\omega}{X'^2+Y'^2}.$$

En d'autres termes, un même cercle:

$$x^2+y^2+\lambda(x\sin\omega - y\cos\omega) = 0$$

passe par a et b: ce cercle est d'ailleurs tangent en M à la direction MM', c. à d. à la courbe F. Donc, les centres harmoniques des points $A_1 \ldots . A_n$ et $B_1 \ldots . B_n$ par rapport à un même point M du lieu F, sont sur un cercle tangent à F au point M, et, comme on peut remplacer les points $A_1 \ldots . A_n$, ou $B_1 \ldots . B_n$ par les n foyers réels d'une quelconque des courbes du faisceau tangentiel determiné par les courbes A et B, on a ce résultat:

Soit F le lieu des foyers des courbes de classe n appartenant à un faisceau tangentiel donné: le centre harmonique des n foyers réels de l'une quelconque de ces courbes par rapport à un point choisi arbitrairement sur F reste sur un cercle, tangent en ce point à la courbe F.

19. Un cas particulier remarquable est celui où le point M est un *point double* de la courbe F; l'équation

$$\xi \sin \omega - \eta \cos \omega = \xi' \sin \omega - \eta' \cos \omega$$

est alors vérifiée pour les deux valeurs de ω qui correspondent aux deux branches de la courbe passant en M, et, par suite, on a nécessairement $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$. Donc:

Si la courbe F a un point double, le centre harmonique des n foyers réels d'une quelconque des courbes du faisceau tangentiel par rapport à ce point, est un point fixe.

Si M est à l'infini, et ne coïncide pas avec un des points cycliques du plan, il est aisé de voir que le centre harmonique d'un groupe de points par rapport à M coïncide avec le centre des moyennes distances de ces points; or on prouve facilement que, si aucune des courbes A et B n'a de foyer à l'infini, la courbe F a une asymptote réelle, et par suite, il résulte du théorême démontré plus haut, que le centre des moyennes distances des n foyers réels d'un courbe variable, appartenant à un faisceau tangentiel déterminé, décrit une *droite*.

L'application de ces théorêmes généraux au cas d'un faisceau tangentiel de coniques présente quelque intérêt.

V.—*Lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques.*

20. Soient deux coniques, A et B, ayant respectivement pour foyers réels les points f et f', g et g': le lieu, F, des foyers des coniques inscrites dans le

même quadrilatère que les coniques A et B est, d'après la théorie générale, le lieu des points M tels que les systèmes de droites Mf et Mf', Mg et Mg' aient mêmes bissectrices.

Rien n'est plus facile que d'obtenir, en partant de là, l'équation du lieu: on trouverait une cubique, passant par les points cycliques du plan, et ayant une asymptote parallèle à la droite qui joint les milieux des segments ff' et gg', c. à d. les centres des coniques A et B.

Cette cubique peut être déterminée par points d'une manière très simple.

La conique A a deux foyers imaginaires, qui s'obtiennent en joignant f et f' aux points cycliques I et J, et en prenant les intersections des droites ainsi obtenues; ces deux nouveaux points, f_1 et f_1', sont aussi sur le lieu des foyers F.

De même, si l'on joint les points f et f' aux points g et g', les droites fg et $f'g'$, fg' et $f'g$ se coupent respectivement en deux nouveaux points, k et k', qui sont sur F, d'après la propriété fondamentale de ce lieu.

Il y a plus: les couples de points f_1 et f_1', k et k' jouent le même rôle que les couples f et f' ou g et g'. La proposition est évidente pour les points f_1 et f_1' qui sont des foyers d'une des coniques du faisceau; on peut montrer de même que k et k' sont aussi les foyers d'une de ces coniques: en effet, une conique du faisceau a un foyer en k, puisque k est sur F; le second foyer réel de cette conique est nécessairement en k', puisque les couples de droites fk, fk' et $f'k$, $f'k'$ ont mêmes bissectrices que les couples fg, fg' et $f'g$, $f'g'$, avec lesquels ils coïncident.

En d'autres termes, le lieu F peut être défini, au moyen des 3 couples de points f et f', g et g', I et J, de la manière suivante: on joint deux à deux les points de deux de ces couples, on obtient, par les intersections des droites ainsi construites, un nouveau couple; en opérant de la même manière sur ce nouveau couple et sur le troisième, on obtient un cinquième couple, et on continue ainsi indéfiniment en combinant deux quelconques des couples obtenus; tous ces couples sont sur F. On reconnaît la construction discontinue donnée par Schröter pour les courbes du troisième ordre; les couples de points considérés sont des couples *de pôles conjugués;* ils jouissent de la propriété que les tangentes menées à la cubique aux deux points d'un couple se rencontrent sur la courbe.

21. On peut dire d'après cela que *le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une cubique circulaire, dont les tangentes aux points cycliques se*

coupent sur la courbe; ou, plus simplement, une cubique circulaire qui passe par son foyer singulier.

Réciproquement, toute cubique circulaire passant par son foyer singulier peut être considérée comme le lieu des foyers de coniques inscrites dans un quadrilatère: il suffit de prendre sur cette cubique deux couples de pôles conjugués quelconques, f et f', g et g', du même système que le couple formé par les points cycliques, et la cubique est le lieu des foyers des coniques du faisceau tangentiel déterminé par deux coniques, quelconques d'ailleurs, ayant respectivement pour foyers les points f et f', g et g'.

La propriété caractéristique du lieu F peut, par une transformation homographique, être mise sous la forme suivante:

Les deux couples de droites qui joignent un point quelconque d'une cubique à deux couples de pôles conjugués d'un même système, situés sur cette cubique, sont en involution.

Ce théorême est dû à M. Cremona.

22. Les propositions démontrées plus haut relativement aux centres harmoniques prennent une forme assez simple si l'on observe, avec Laguerre, que le centre harmonique, a, de deux points, f et f', par rapport à un point M est sur la circonférence passant par M, f et f', et que les points M, a, f, f' divisent harmoniquement cette circonférence.

Par un point M, du lieu F des coniques inscrites dans un quadrilatère, et les foyers f et f' de l'une quelconque de ces coniques, faisons passer un cercle, et prenons, sur ce cercle, le point a, qui, avec les points M, f, f' divise harmoniquement la circonférence: d'après un théorême établi plus haut, *le point a décrit un cercle tangent en M à la courbe F.*

On voit aisément que ce cercle passe par le point obtenu en prolongeant d'une longueur égale à elle-même la droite qui va de M au foyer singulier de la cubique.

Si la courbe F a un point double, le centre harmonique des deux points d'un même couple, f et f', par rapport à ce point double est un point fixe: il est très facile d'établir que la courbe F n'aura de point double que si le faisceau de coniques qui sert à la définir contient un cercle; le point double est alors le foyer du cercle. Donc:

Si, par les foyers f et f' de l'une quelconque des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle de centre o, et par le point o on fait passer une circonférence, cette circonférence passe par un second point fixe, o', qui, avec les points o, f et f', la divise harmoniquement. Le segment oo' a pour milieu le foyer singulier de la cubique lieu des foyers f, f'.

La courbe F est alors ce que Quételet appelle une *focale à nœud;* une focale à nœud est, d'après ce qui précède, une cubique unicursale passant par les points cycliques et par son foyer singulier.

23. On rencontre cette courbe dans un problème assez intéressant de la Géométrie de l'espace.

Chasles a fait voir que le lieu des pieds des normales à un système de quadriques homofocales, contenues dans un plan donné P, est une focale à nœud, et nous avons démontré que le lieu des foyers des sections faites par le plan P dans les quadriques homofocales coïncide avec le lieu de Chasles. On peut établir directement que le lieu des foyers est une focale à nœud, en s'appuyant sur les principes généraux énoncés au commencement de ce travail, et en déduire quelques propriétés géométriques simples.

24. Cherchons en effet l'équation tangentielle, dans le plan P, des coniques communes à ce plan et aux surfaces homofocales.

Il y a deux quadriques du système homofocal qui touchent une droite donnée; donc deux des coniques, dans le plan P, touchent une droite de ce plan, et l'équation générale cherchée contiendra un paramètre, θ, au second degré. Elle sera de la forme :

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0,$$

et l'on pourra supposer que les coniques $A = 0$ et $C = 0$ sont deux quelconques des coniques du système.

Or parmi ces coniques figure celle qui se compose des deux points cycliques du plan P, puisque le cercle à l'infini fait partie du système homofocal; on peut donc supposer que l'on a :

$$A = u^2 + v^2,$$

et l'équation devient

$$(u^2 + v^2)\,\theta^2 + B\theta + C = 0.$$

Les coniques ainsi représentées sont homofocales aux coniques

$$B\theta + C = 0,$$

qui appartiennent à un même faisceau tangentiel.

Cette remarque suffit pour établir que le lieu des foyers des coniques est une cubique circulaire, passant par son foyer singulier; observons maintenant qu'une des quadriques du système homofocal touche le plan P, et par suite une des coniques se réduit (au point de vue tangentiel) au point de contact compté deux fois; ce point est donc un point double de la cubique, qui est dès lors une focale à nœud.

Si maintenant on désigne par f et f', g et g', les foyers de deux des coniques, la focale à nœud peut être considérée, comme le lieu des foyers des coniques tangentes aux droites fg, fg', $f'g$, $f'g'$, et, puisqu'elle a un point double, ces quatre droites doivent nécessairement toucher un cercle décrit du point double comme centre.

25. On peut donc énoncer les propositions suivantes.

Le lieu des foyers des sections faites dans une série de quadriques homofocales par un plan P est une focale à nœud, dont le point double est le point de contact, o, du plan P avec la quadrique du système qui touche ce plan.

Si par le point o et les foyers f et f' de l'une des coniques d'intersection on fait passer un cercle, ce cercle passe par un second point fixe, o', qui, avec les points o, f et f' divise harmoniquement la circonférence.

Le segment oo' a pour milieu le foyer singulier, φ, de la focale; ce point φ est le foyer de la parabole qui figure parmi les coniques d'intersection.

Les quatre droites qui joignent les foyers réels de l'une des coniques d'intersection aux foyers réels d'une autre de ces coniques touchent un même cercle qui a pour centre le point o.

En particulier:

Les droites qui joignent deux à deux les points d'intersection de deux coniques, focales l'une de l'autre, par un même plan, forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle.

VI.—*Propriété des foyers des courbes appartenant à un faisceau tangentiel.*

26. Nous avons démontré au n° 18, comme conséquence d'une proposition fondamentale, que le centre harmonique des n foyers réels d'une courbe appartenant à un faisceau tangentiel de classe n, par rapport à un point du lieu F correspondant, reste sur un cercle, tangent en ce point à la courbe F.

Par des considérations d'un autre ordre, sur lesquelles nous aurons à revenir, à un point de vue plus général, dans un travail ultérieur, on arrive à un résultat qui complète le précédent, et que nous nous bornerons à énoncer :

Le centre harmonique, par rapport à un point du plan, des foyers réels de chacune des courbes d'un faisceau tangentiel, décrit un cercle.

Ce théorême peut recevoir une forme plus élégante si l'on observe avec Laguerre que le centre harmonique des foyers réels d'une courbe par rapport à un point coïncide avec le centre harmonique des points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à la courbe. Ainsi :

Le centre harmonique, par rapport à un point du plan, des points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à chacune des courbes d'un même faisceau tangentiel décrit un cercle.